名古屋大学大学院環境学研究科

地球環境科学専攻　大気水圏科学系

博士前期課程　普通入試

【専門科目　物理学　出題例】

（注意事項）

　本ファイルは、2018 年度以降の専門科目の試験において出題された問題の例を掲載している（すべての問題を掲載しているわけではない）。筆記試験を実施した年度に出題された問題と、口頭試問を実施した年度に出題された問題の両方を含む。

　口頭試問では、解答に対して質問を重ねる場合がある。また、一題ずつ出題されるなど、試問の開始時にすべての問題文が受験生に対し開示されていない場合がある。問題によっては紙に書いて解答することを指示する場合がある。

問題　図１に示すように、質量が無視できる長さ L のひもにつながれた質量 m の質点が、微小な角度 θ で単振動をしているとき、以下の問に答えなさい。ただし、角度θは図１のように点線の右にあるときを正とする。

問１　質点の接線方向の速度と加速度を図中の記号を用いて示しなさい。

問２　重力加速度を g とすると、質点の重力の接線方向の成分を示しなさい。

問３　接線方向についての質点の運動方程式を示しなさい。

問４　角度θが十分小さいとして、その運動方程式を解いて、一般解を求めなさい。

問５　その解の振動の周期 T を求め、その解がなぜ振り子の等時性を表すのかを説明しなさい。

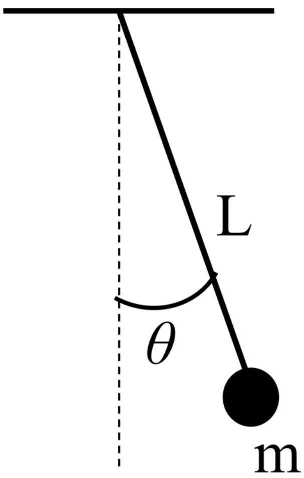

図1

問題　図 2 はカルノーサイクルの体積－圧力図で、AB、BC、CD、DA の順に 4 つのプロセスが進む。この図に関して、以下の問に答えなさい。体積を *V*、圧力を *p* とし、図中にあるように温度は *T1*、*T2* である。また、系に出入りする熱を *Q1*、*Q2* とする。

問１　A から B への変化はどのようなプロセスか説明しなさい。

問２　BC を通る曲線の式を示し、B から C への変化はどのようなプロセスかを説明しなさい。

問３　上記 4 つのプロセスで、系のエントロピー*S* の変化が起こるのはどのプロセスかを答えなさい。また、そのときのエントロピーの変化量を示しなさい。

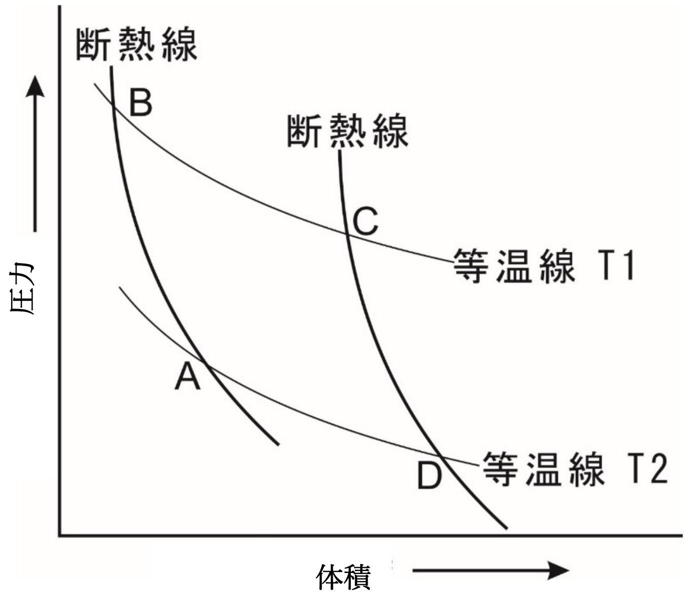

図２

問題　次の式は振り子の微小振動についての運動方程式である。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2m\gamma\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=mF_0\sin(\omega t)$$

xは振動による変位、 tは時間、 mはおもりの質量である。γ、F_0、ω、ω_0はそれぞれ時間によらない定数とする。$t=0$で振り子に微小な振動を与え、その後の振り子の運動を観察する。
問1～4に答えよ。

問1　$\gamma=0$および$F_0=0$のとき、$\theta\ll 1$では振り子の運動方程式が

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\theta$$

と近似的に書けることを説明せよ。ここで、 lは糸の長さ、θは糸の回転角、 gは重力加速度である。

問2　問1の結果から、振り子の固有角振動数ω_0を求めよ。

問3　$\gamma\neq 0$および$F_0=0$のとき、振り子の運動の特徴を説明せよ。

問4　$\gamma\neq 0$および$F_0\neq 0$のとき、振り子の運動の特徴を説明せよ。

問題　次の問1～3に答えよ。

問1　熱力学における温度と熱の概念を説明しなさい。

問2　物質の比熱とは何かを説明しなさい。

問3　積一定の物質に与えられる熱とそれによる温度変化の関係を示しなさい。

問題　次の問1～2に答えよ。

問1　剛体の回転運動において固定軸のまわりの慣性モーメントとはどのような量であるかを説明しなさい。

問2　一般に剛体の回転運動において、問１の慣性モーメントと力のモーメントとの関係はどのようなものかを説明しなさい。

問題　以下の問いに答えなさい。

問１　理想気体の状態方程式を書いて、その意味を説明しなさい。

問２　熱力学の第１法則を説明しなさい

問３　理想気体の準静的断熱変化において、熱力学の第１法則はどのように表されるか式で表しなさい。

問４　熱力学の第２法則を説明しなさい

問題　以下の問いに答えなさい。

問１　半径 a、質量 M の一様な球を考える。この球の質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメントの計算方法を説明しなさい。

問２　この球を摩擦のある水平面上に置き、中心に対して水平に突いて初速 v_0 を与えた時の運動についての、運動方程式の立て方を説明しなさい。

問題　図１のように，鉛直下向きの一様な重力場（重力加速度の大きさg）のもとで，質量m，半径aの密度一様な円柱を，水平から角度θをなす斜面上におき，時刻$t=0$で静かに手を離す．円柱は斜面に沿って下向きに進むものとし，その距離をxとする（円柱の回転軸は常に図１の紙面に垂直とする）．円柱については，その回転軸周りの慣性モーメントをIとし，重心の速度をv，回転角速度をωとする．また，円柱と斜面との間に働く摩擦力をfとし，転がり摩擦は無視できるものとする．以下の問１～問４に答えなさい．

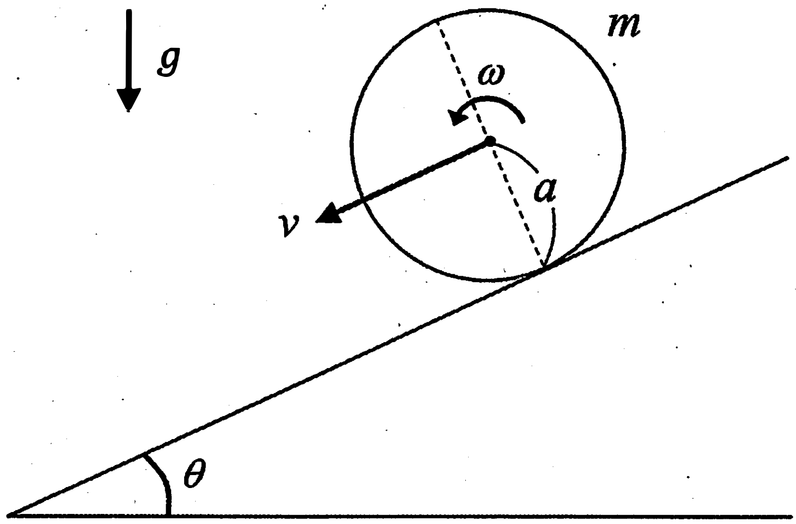

図１

問１　円柱の慣性モーメントは，$I=\dfrac{ma^2}{2}$となることを示しなさい．

問２　円柱が斜面を滑らずに，転がり落ちる場合について，以下の（１）～（６）の問いに答えなさい．

（１）円柱の重心の，斜面に沿った方向の運動方程式を，m，v，f，θ，gを用いて書きなさい．

（２）円柱の回転の運動方程式を，I，ω，f，aを用いて書きなさい．

（３）円柱の重心の速度vと回転角速度ωの関係を示しなさい．

（４）時刻tにおける円柱の重心の速度v，進んだ距離x，回転角速度ωを求めなさい．ただし，円柱の慣性モーメントIには問１の表記を用いること．

（５）円柱の力学的エネルギーが保存することを示しなさい．

（６）摩擦力fを，m，θ，gを用いて書きなさい．

問３　θがある角度θ_1より大きくなると，円柱は滑りながら転がり落ちるようになる．この角度θ_1を用い，円柱と斜面の間の静止摩擦係数μを表しなさい．

問４　円柱が滑りながら，転がり落ちる場合（$\theta > \theta_1$）について，以下の（１），（２）の問いに答えなさい．

（１）円柱の重心の，斜面に沿った方向の運動方程式，および回転の運動方程式をそれぞれ書きなさい．ただし，円柱と斜面の間の動摩擦係数をμ'とする．

（２）この場合，円柱の力学的エネルギーは保存しない．なぜ保存しないのか，理由を述べなさい．

問題　図2(a)のように絶対温度T_a，T_b，T_c（$T_a > T_b > T_c$）の3つの熱源A，B，Cと熱のやり取りおよび，力学装置と仕事のやり取りをする系を考え，これを系Dと呼ぶことにする．初期状態での系Dの温度をT_a，エントロピーをS_0，内部エネルギーをU_0とし，以下の①～⑥の熱力学操作をこの順で行う（図2(b)）．

① 系Dを熱源Aと熱的に接触させた状態で力学装置を用いて系Dに対して準静的に仕事を行い，系DのエントロピーをS_1に変化させる．

② 系Dへの熱の出入りを遮断して力学装置を用いて系Dに対して準静的に仕事を行い，系Dの温度をT_bに変化させる．

③ 系Dを熱源Bと熱的に接触させた状態で力学装置を用いて系Dに対して準静的に仕事を行い，系DのエントロピーをS_2に変化させる．

④ 系Dへの熱の出入りを遮断して力学装置を用いて系Dに対して準静的に仕事を行い，系Dの温度をT_cに変化させる．

⑤ 系Dを熱源Cと熱的に接触させた状態で力学装置を用いて系Dに対して準静的に仕事を行い，系DのエントロピーをS_3に変化させる．

⑥ 系Dへの熱の出入りを遮断して力学装置を用いて系Dに対して準静的に仕事を行い，系Dの温度をT_aに変化させる．

操作①③⑤では準静的等温過程，②④⑥では準静的断熱過程が実現される．⑥の操作後の系Dの内部エネルギーをU_fとする．各操作で系Dが熱源A，B，Cから受け取った熱量をそれぞれQ_a，Q_b，Q_cとし，全操作①～⑥を通して系Dが力学装置からなされた仕事の総和をWとする．これらの熱量や仕事は負の値を取る場合もある．熱源の温度変化は無視でき，Q_a，Q_b，Q_c，W以外の熱や仕事のやり取りは存在しないものとする．以下の問1～問4に答えなさい．

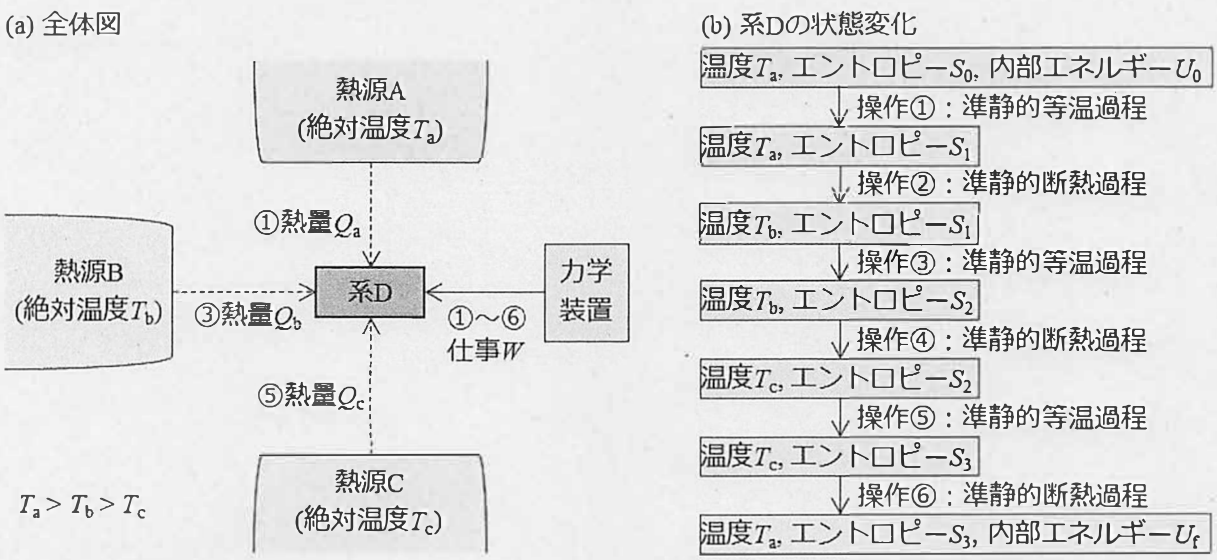

図2

問１　熱力学第１法則に基づき，①～⑥の熱力学操作全体を通した系Ｄの内部エネルギー変化$U_f - U_0$をQ_a，Q_b，Q_c，Wを用いて表しなさい．

問２　①～⑥の熱力学操作全体を通した系Ｄのエントロピー変化$S_3 - S_0$をQ_a，Q_b，Q_c，T_a，T_b，T_cを用いて表しなさい．

問３　$Q_a < 0$，$Q_b > 0$，$Q_c < 0$，$W = 0$，$S_0 = S_3$とした場合，①～⑥の熱力学操作全体の結果として系Ｄが熱源Ｂから熱量Q_bを受け取って熱源ＡとＣに分配したことになる．このときのQ_aとQ_cをそれぞれQ_b，T_a，T_b，T_cを用いて表しなさい．なお問１，問２の答えを用いて良い．

問４　$Q_a \geqq 0$，$Q_b \geqq 0$（ただし$Q_a + Q_b \neq 0$）とし，$Q_c < 0$，$W < 0$，$S_0 = S_3$とした場合，系Ｄは熱源Ａ，Ｂから熱を受け取って熱源Ｃに放熱するとともに力学装置に対して仕事をする熱機関と見なせる．この熱機関の効率を求めるために以下の２つのサイクルを考える．まず$Q_a > 0$，$Q_b = 0$として①～⑥の熱力学操作を１サイクル行う．これをサイクル１と呼び，その効率をη_1とする．次に$Q_a = 0$，$Q_b > 0$として①～⑥の熱力学操作を１サイクル行う．これをサイクル２と呼び，その効率をη_2とする．（１）～（３）の問いに答えなさい．

（１）η_1およびη_2をT_a，T_b，T_cを用いて表しなさい．

（２）サイクル１とサイクル２を合わせて系Ｄが力学装置に対して行った仕事の総和W^{total}をQ_a，Q_b，η_1，η_2を用いて表しなさい．

（３）以上の結果を用いることにより，この熱機関を$Q_b = 2Q_a$として動かしたときの効率ηをT_a，T_b，T_cを用いて表しなさい．

問題 空欄 $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（ケ）}}$ にはあてはまる式を，$\boxed{\text{（コ）}}$ にはあてはまる文を入れて，慣性モーメントに関する下の文章を完成させなさい．

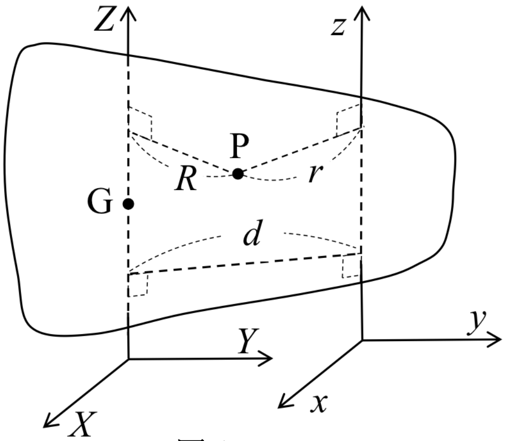

図 1

「質量 M の剛体の，質量中心 G を通るある軸のまわりの慣性モーメント I_{G} が知られているとき，この軸と平行で距離 d 離れた軸のまわりの慣性モーメントを I とすると，$I = I_{\mathrm{G}} + Md^2$ ，が成り立つ.」

この定理は以下のように証明することができる．

図 1 のように，Z軸が質量中心 G を通る XYZ直交座標系，およびこれを平行移動した xyz直交座標系をとる．Z軸とz軸の距離を d とし，それぞれの軸のまわりの慣性モーメント I_{G} と I を考える．剛体内の任意の点 P について，それぞれの座標系での座標を，$(X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}}, Z_{\mathrm{P}})$，$(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}})$とする．また，$xyz$座標系における質量中心 G の座標を$(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}, z_{\mathrm{G}})$とする． 点 P と Z軸および z軸との距離をそれぞれ R，r とし，点 P 近傍の微小部分の体積を dv，密度をρとすると，これらの量を用いてそれぞれの軸のまわりの慣性モーメントは，定義によって，

$$I_{\mathrm{G}} = \int \boxed{\text{（ア）}}\, dv, \quad I = \int \boxed{\text{（イ）}}\, dv,$$

と表される．ただし積分は剛体の全体積に関する積分である．R^2 と r^2 をそれぞれ XYZ座標系と xyz座標系における点 P の座標を用いて表すと

$$R^2 = \boxed{\text{（ウ）}} \quad , \quad r^2 = \boxed{\text{（エ）}} \; .$$

ここで $x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}$を用いて，$X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}}$は $X_{\mathrm{P}} = \boxed{\text{（オ）}}$，$Y_{\mathrm{P}} = \boxed{\text{（カ）}}$ と表される．

よって $r^2 = \boxed{\text{（エ）}}$ の右辺を $X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}}$，$x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}$ を用いて表すと，

$$r^2 = \boxed{\text{（キ）}} \; .$$

これを $I = \int \boxed{\text{（イ）}} dv$ に代入すると，

$$I \;= \boxed{\text{（ク）}} \; ,$$

と表される．ここで，$M = \int \rho dv$，$x_{\mathrm{G}}{}^2 + y_{\mathrm{G}}{}^2 = \boxed{\text{（ケ）}}$であり，$\int X_{\mathrm{P}} \rho dv$，$\int Y_{\mathrm{P}} \rho dv$ は $\boxed{\text{（コ）}}$ という理由でゼロであることから，

$$I = I_{\mathrm{G}} + Md^2 \; ,$$

が求まる．

問題　質点の運動に関する以下の問１～問２に答えなさい．

問１　一様重力場（重力加速度 $\boldsymbol{g}$ の大きさ g）のもとで，摩擦の無い下に凸な曲面に沿って滑る質点（質量 m）の運動を考える．図２に示す通り，点 O を原点とし，x 軸を水平方向，y 軸を鉛直方向とする座標系において，曲面の形状が $y=\dfrac{x^2}{2l}$（l は定数）と表されるとする．質点の運動は，xy 平面内に限られるとする．以下の（１）～（３）の問いに答えなさい．

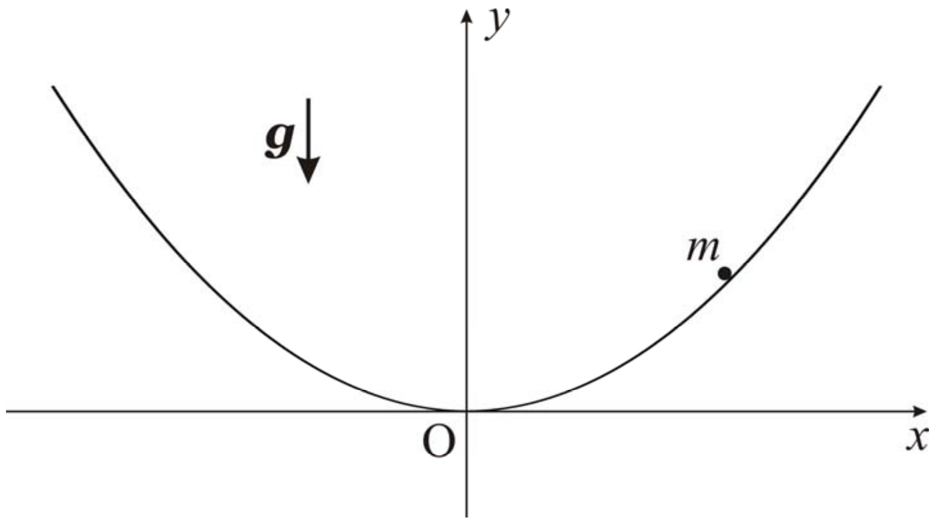

図２

（１）質点についての運動方程式を示しなさい．ただし，質点が曲面から受ける垂直抗力の大きさを N とする．

（２）質点の力学的エネルギーが保存されることを示しなさい．

（３）質点が $x=0$ 付近で微小振動するときの周期を求めなさい．このとき，微小振動は単振動として近似できるものとする．

問２　問１において，曲面の形状が一般的に $y=u(x)$ と表される場合を考える．ただし，$u(x)$ は $x=0$ で極小値 $u(0)=0$ をとり，かつ二階導関数が $u''(0)\neq 0$ である滑らかな関数とする．質点が $x=0$ 付近で微小振動するときの周期を求めなさい．このとき，微小振動は単振動として近似できるものとする．

問題　気体の準静的断熱過程に関する以下の問１〜問４に答えなさい．ただし，次の二つの熱力学関係式

$$TdS = dU + pdV$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

を用いてよい．ここで，V，p，T，U，S はそれぞれ，体積，圧力，温度，内部エネルギー，エントロピーとする．また，気体定数を R とし，理想気体および van der Waals 気体における 1 mol あたりの定積熱容量 $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ は定数とみなしてよい．

問１　状態方程式 $pV = RT$ に従う 1 mol の理想気体では，$dU = C_V dT$ となることを示しなさい．

問２　1 mol の理想気体の準静的断熱過程（$dS = 0$）において，$TV^{\frac{R}{C_V}} = \mathrm{const.}$（定数）の関係が成り立つことを示しなさい．

問３　状態方程式 $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$（$a$，$b$ は定数）に従う 1 mol の van der Waals 気体の準静的断熱過程（$dS = 0$）において，$T(V - b)^{\frac{R}{C_V}} =$ const.（定数）の関係が成り立つことを示しなさい．

問４　次に，光子の集団により熱放射場を表現する光子気体の準静的断熱過程について考える．状態方程式 $pV = \frac{U}{3}$ に従い，内部エネルギーが $U = \alpha T^4 V$（α は定数）となる光子気体の準静的断熱過程（$dS = 0$）において，$T^3 V =$ const.（定数）の関係が成り立つことを示しなさい．

問題　図１のように，鉛直下向きの一様な重力場のもとで，水平な床に固定されている半径Rの半球がある．半球の頂上から僅かにずれた位置に，半径r，質量mの球対称な密度分布を持つ球をのせて静かに手を離したところ，球は半球を滑らずに転がり，その後，滑りはじめた．ここでは，球を半球の上にのせた際の頂点からの位置のずれは十分に小さいとして無視できるものとする．時間をt，球の重心を通る回転軸周りの慣性モーメントをI，半球の中心と球の重心を結んだ直線と鉛直上向き方向とのなす角をθ，球と半球の間に働く摩擦力の大きさをF，垂直抗力の大きさをN，重力加速度の大きさをgとし，転がり摩擦は働かないものとする．球の重心運動の進行方向を向いた単位ベクトルを$\vec{s}$，球の重心から半球の中心を向いた単位ベクトルを$\vec{n}$とする．以下の問１～問２に答えなさい．

問１　球が半球を滑らずに転がっているときの運動について，小問（１）～（７）に答えなさい．

（１）球の重心の速度ベクトル$\vec{v}=v\vec{s}$の大きさvと$\dfrac{d\theta}{dt}$の関係を求めなさい．

（２）球の重心の加速度ベクトル$\vec{a}$は$\vec{a}=\dfrac{dv}{dt}\vec{s}+\dfrac{v^2}{r+R}\vec{n}$と表せることを速度ベクトルの微分により示しなさい．

（３）球の重心運動について，$\vec{s}$ベクトルと$\vec{n}$ベクトルに沿った方向の運動方程式をそれぞれ立てなさい．

（４）球の回転に関する運動方程式を立てなさい．

（５）静止した座標系でみたときの，球の重心周りの回転角速度の大きさをωとする．滑らない条件から$\dfrac{d\theta}{dt}$とωの関係を求めなさい．

（６）以下の関係を導出しなさい．また，その物理的意味を説明しなさい．

$$\frac{1}{2}m(r+R)^2\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=mg(r+R)(1-\cos\theta)$$

（７）摩擦力F，垂直抗力Nをθの関数として表しなさい．I，m，r，gを用いること．

問２　球は$\theta=\theta_c$まで転がったところで滑り始めた．球と半球の間の静止摩擦係数μをθ_cを用いて表しなさい．ここでは球の密度を一様として，$I=\dfrac{2}{5}mr^2$を用いてよい．

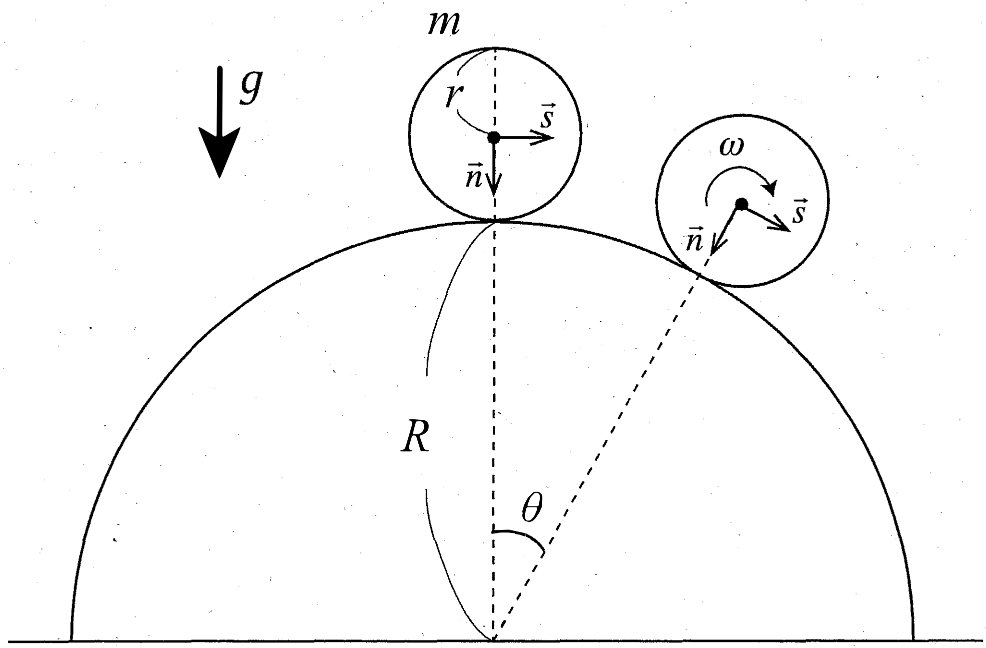

図１

問題　点Oに質量Mの質点（以下，質点Mという）があり，また，Oから距離rのところに質量Mに比べて十分小さな質量 m の質点（以下，質点mという）があって，質点mが，質点Mから万有引力を受けて，動いている状況を考える．その質点mの軌道を求めたい．その際，この系が有する 2 つの保存量，すなわち，角運動量ベクトルおよび Laplace-Runge-Lenz ベクトル（離心ベクトル，ともいう）を活用する．

時間をt，Oを始点とする質点mの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$，質点mの速度ベクトルを$\boldsymbol{v}$，万有引力定数をGとする．すると，質点mは，次の運動方程式 (1) にしたがう．

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = -GMm\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1}$$

単位質量あたりの角運動量ベクトル$\boldsymbol{h}$ は，次のように定義される．

$$\boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \tag{2}$$

また，Laplace-Runge-Lenz ベクトル$\boldsymbol{e}$ は，次のように定義される．

$$\boldsymbol{e} \equiv \frac{1}{GM}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{h}) - \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{3}$$

以下の問１～問２に答えなさい．

なお，解答にあたり，必要に応じて，次のベクトル解析の公式を使いなさい．

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{a}$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} \tag{b}$$

問１　以下の小問（１）～（２）に答えなさい．

（１）　式 (1) を利用して，式 (2) で定義された単位質量あたりの角運動量ベクトル$\boldsymbol{h}$が保存量であることを示しなさい．

（２）　式 (1) の両辺と$\boldsymbol{h}$との外積をとることにより，式 (3) で定義された Laplace-Runge-Lenz ベクトル$\boldsymbol{e}$ が保存量であることを示しなさい．

問２　問１で示したことを用いて，以下の小問（１）～（３）に答えなさい．なお，$e \equiv |\boldsymbol{e}|$，$h \equiv |\boldsymbol{h}|$，と定義し，$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{r}$ とのなす角を θ とする．

（１）質点 m の軌道が，一つの平面の上にあることを説明しなさい．また，Laplace-Runge-Lenz ベクトル $\boldsymbol{e}$ が，O を始点とすると，その軌道平面の上にあることを説明しなさい．

（２）式 (3) の両辺と $\boldsymbol{r}$ との内積をとることにより，軌道の方程式の極座標表示である次の式 (4) を求めなさい．

$$r = \frac{L}{1 + e\cos\theta} \tag{4}$$

ただし，

$$L \equiv \frac{h^2}{GM}$$

とする．

（３）$0 < e < 1$ の場合に，軌道が楕円となることを，式 (4) から直交座標における楕円の方程式の標準形を導出することにより，示しなさい．