名古屋大学大学院環境学研究科

地球環境科学専攻　大気水圏科学系

博士前期課程　普通入試

【専門科目　数学　出題例】

（注意事項）

　本ファイルは、2018 年度以降の専門科目の試験において出題された問題の例を掲載している（すべての問題を掲載しているわけではない）。筆記試験を実施した年度に出題された問題と、口頭試問を実施した年度に出題された問題の両方を含む。

　口頭試問では、解答に対して質問を重ねる場合がある。また、一題ずつ出題されるなど、試問の開始時にすべての問題文が受験生に対し開示されていない場合がある。問題によっては紙に書いて解答することを指示する場合がある。

問題　次の微分方程式を解きなさい。

$$x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

問１　$y = xv$ として、x と v の微分方程式に書き換えたものを示しなさい。

問２　v をおきもどして微分方程式を解きなさい。

問題　正規分布について以下の問いに答えなさい。

問１　正規分布の特徴を以下の語句を用いて説明しなさい（100 字程度）。

平均値　　最頻値　　中央値　　左右対称　　誤差

問２　以下に示される正規分布の確率密度 $f_N(x)$ の式から、正規分布の期待値 $E_N(x)$ が μ となることを計算して求めなさい。

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

なお、期待値 $E_N(x)$ は以下の式を用いて計算できる。

$$E_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_N(x) dx$$

必要に応じて以下のガウス積分の公式を参照しなさい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

問題　次の問1～3に答えなさい。

問１　次の不定積分を計算する手順を述べなさい。

$$\int xe^{-ax}\,dx$$

問2　問1の不定積分を計算しなさい。

問3　問2の結果を利用し、$a > 0$のとき次の定積分を求めなさい。

$$\int_0^{\infty} xe^{-ax}\,dx$$

問題　次の問1～3に答えなさい。

問1　ある関数 $f(x)$が線形であるとはどういうことかを説明しなさい。

問2　ベクトルの直交の定義のアナロジーとして、二つの関数が直交することの定義を示しなさい。

問3　ある関数の集合が直交関数系であるとはどういうことかを説明しなさい。

問題　以下の問いに答えなさい。

問１　計算の基本法則に、分配法則、加法の交換法則・結合法則などがある。２つのベクトル x と y を用いて、これらの法則を説明しなさい。

問２　ベクトルは 2 次元や 3 次元空間では、大きさと方向を持つ量として矢印などで図示される。より高次元に拡張する場合、ベクトルはベクトル空間（線形空間）の元と定義される。問 1 の法則や単位元を用いてベクトル空間の概要を説明しなさい。

問３　ベクトル空間が計量ベクトル空間となるためには、その元であるベクトルについて、何が定義される必要があるか？

問題　以下の問いに答えなさい。

問１　置換の概念を用いて、ある行列の行列式とは何かを説明しなさい。

問２　正方行列とは行と列の数が同じものである。この正方行列が正則行列であるための必要十分条件を問 1 の行列式を用いて示しなさい。

問３　同次連立 1 次方程式の係数行列が正則であるとき、その解はどのようになるかを説明しなさい。

問題　以下の問いに答えなさい。

問１　一般に次の一階の常微分方程式は、どのように解くことができるか。

$$\frac{dy}{dx} = P(\mathrm{x})Q(\mathrm{y})$$

問２　次の微分方程式を解いて一般解を求めなさい。

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y^2$$

問題　以下の問いに答えなさい。

問１　対数微分法の手順を説明しなさい。

問２　次の関数を対数微分法により微分しなさい。

$$\mathrm{y} = x^x$$

問題　次の行列 A について，以下の問 1～問 3 を解答しなさい．

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

問 1　A^n を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

問 2　A の逆行列を求めなさい．

問 3　A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

問題　次の定積分の値を求めなさい．

問 1　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$　　　問 2　$\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$

問題　次の常微分方程式を与えられた条件の下に解きなさい．

問 1　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+3y=4e^{-x}$,　ただし，$x=0$ で，$y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=2$ とする．

問 2　$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x-z,\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}=-y\end{cases}$　ただし，$t=0$ で，$(x,y,z)=\left(3,0,\dfrac{1}{3}\right)$ とする．

問題　実数値関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$F(k)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-ikx)\,dx$$

と定義する．ここで，i は虚数単位，k は任意の実数とする．また，$\exp(s)=e^s$ は指数関数である． $f(x)=\exp(-x^2)$ として以下の問 1 と問 2 を解答しなさい．

問 1　$\dfrac{dF}{dk}=-\dfrac{k}{2}F$ となることを示しなさい．

問 2　$F(k)$ を求めなさい．

問題　範囲 $(-\infty,\ +\infty)$ の実数値をとる確率変数 x に対して，平均が 0，分散が σ^2 の正規分布（ガウス分布）に従う確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

と与えられる．ここで，$\exp(s)=e^s$ は指数関数である．また，誤差関数 $\mathrm{erf}(\xi)$ は，ξ を任意の 0 以上の実数として

$$\mathrm{erf}(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi}\exp(-t^2)\,dt$$

と定義される．このとき確率密度関数 $f(x)$ に従う確率変数 x が 99% の確率で含まれる範囲が $|x|\ \leqq X$ であるとして，X の値を定める方程式を，誤差関数 erf を用いて表しなさい．ただし，方程式を X について陽に解く必要はない．

問題　次の行列の行列式の値と逆行列を求めなさい.

問１　$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$　　問２　$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

問題　次の定積分の値を求めなさい.

問１　$\displaystyle\int_1^e (\log_e x)^2 dx$　　問２　$\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

問題　次の常微分方程式を解きなさい.

問１　$\dfrac{dy}{dx} - 2y = \cos x$　　問２　$(x+y)\dfrac{dy}{dx} = (x-y)$

問題　関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を次のように定義する.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

ここで i は虚数単位, t と ω は実数である. 以下の問いに答えなさい.

問１　$f(t),\ g(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(\omega),\ G(\omega)$ とするとき, $f(t),\ g(t)$ の線形結合 $\alpha f(t) + \beta g(t)$ のフーリエ変換は, それぞれのフーリエ変換の線形結合 $\alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$ となることを示しなさい. なお, $\alpha,\ \beta$ は定数である.

問２　$f(t),\ g(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(\omega),\ G(\omega)$ とするとき，$f(t),\ g(t)$ のたたみ込み積分 $(f*g)(t)$ のフーリエ変換は，それぞれのフーリエ変換の積 $F(\omega)G(\omega)$ となることを示しなさい．なお，たたみ込み積分は次の式で定義される．

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds$$

問題　ある事象 A が起きる確率を p とし，事象 A が起きたかどうかに着目して試行を繰り返す．その試行が独立試行である場合には，確率関数 W_x は以下の二項分布で表現される．

$$W_x = {}_nC_x\, p^x(1-p)^{n-x} \qquad (1)$$

ここで，n は試行の回数，x は事象 A が起きる回数である．以下の問いに答えなさい．

問１　二項分布において，$np \equiv \mu$ と定義し，μ を有限のまま p を小さく（ n を大きく）した極限の確率関数は，以下の式で示されるポアソン分布となる．

$$W_x = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} \qquad (2)$$

式(1)から式(2)を導きなさい．なお，実数 λ に対し指数関数 e^{λ} は自然数 n の極限を用いて次の式で定義される．

$$e^{\lambda} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

問２　容積 V の容器内に M 個の気体分子がランダムに存在するとき，容器内の体積 v の領域 $(v < V)$ に m 個の気体分子が存在する確率を求めなさい．

問題　次の行列の行列式の値と逆行列を求めなさい．

問１　$\begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ -\cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　　　問２　$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

問題　次の定積分の値を計算しなさい．ここで x は実数，i は虚数単位である．

問１　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{x}{(\cos x - i\sin x)^2}dx$

問２　$\displaystyle\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

問題　次の常微分方程式を解きなさい．

問１　$\displaystyle 4\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

問２　$\displaystyle x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) + x = 0$

問題　関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を次のように定義する．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

ここで i は虚数単位，t と ω は実数である．以下の問１～問３に答えなさい．

問１　$f(t)$ が実関数であるときに $F(\omega) = F^*(-\omega)$ を満たすことを示しなさい．ここで * は複素共役を表す．

問２　次の関数のフーリエ変換を求めなさい．

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$　（ここで α は実数で，$\alpha > 0$）

問３　問２で求めたフーリエ変換の実部と虚部を問１で示した関係が分かるように図示しなさい．ただし，関数の曲線は，特徴さえ捉えていれば概形を示せばよい．

問題　連続な確率変数 x が平均 μ，分散 σ^2（標準偏差 σ）の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う場合，確率密度関数 $f(x)$ は以下の式で表される．

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

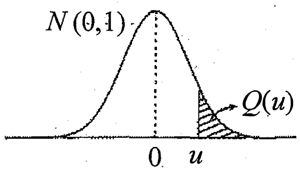
以下の問１～問３に答えなさい．

問１　連続な確率変数 y を $y = ax + b$ と定義する．このとき，確率密度関数 $g(y)$ およびその平均と分散を求めなさい．ここで a と b は実数で，$a > 0$ である．

問２　確率変数 y が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，a と b を μ，σ を用いて表しなさい．

問３　球形粒子を用いた実験を想定する．球形粒子の直径（D）が平均 5. 000 mm，標準偏差 0. 010 mm の正規分布に従うサンプルの中から，$4.985 < D < 5.015$（単位は mm）の粒子を使用しなければならないとき，使用できる粒子数の全粒子数に対する割合（%）を表１を参考にして求めなさい．

表１．標準正規分布 $N(0,1)$ の上側確率 $Q(u)$．ここで
$Q(u)$ は，u 以上の値を取る確率を表す．



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010

与えられた $u(>0)$ に対し，その小数点以下１桁までの数字により左の見出しのそれを，小数点以下２桁目の数字で上の見出しのそれを定めるとき，その交差点にある数字が $Q(u)$ の値である．

例． $u=1.23$ のとき，左の見出しが 1.2 と上の見出しが 0.03 の交差点にある 0.1093 が求める $Q(1.23)$ の値である．

(篠崎信雄，統計解析入門，1994)